Arkusz egzaminacyjny z egzaminu ósmoklasisty E8 Matematyka

INSTRUKCJA DLA UCZNIA

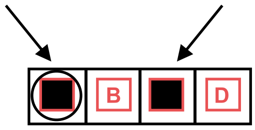
1. Ze środka arkusza wyrwij **kartę rozwiązań zadań otwartych** (tj. 4 środkowe kartki).
2. Sprawdź, czy na kolejno ponumerowanych **17 stronach** zeszytu zadań jest wydrukowanych **21 zadań** oraz czy jest do niego dołączona karta odpowiedzi.
3. Sprawdź, czy karta **rozwiązań zadań otwartych** zawiera kolejno ponumerowanych **8 stron**.
4. Ewentualny brak stron lub inne usterki zgłoś nauczycielowi.
5. Na tej stronie, na karcie rozwiązań zadań otwartych i na karcie odpowiedzi w wyznaczonych miejscach wpisz swój kod, numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
6. Czytaj uważnie wszystkie zadania i wykonuj je zgodnie z poleceniami.
7. Rozwiązania zadań zapisuj długopisem lub piórem z czarnym tuszem/atramentem.
8. Nie używaj korektora.
9. Rozwiązania zadań **zamkniętych**, tj. **1–15**, zaznacz na karcie odpowiedzi zgodnie z informacjami zamieszczonymi na następnej stronie. W każdym zadaniu poprawna jest zawsze **tylko jedna** odpowiedź.
10. Rozwiązania zadań **otwartych**, tj. **16–21**, , zapisz czytelnie i starannie w wyznaczonych miejscach na **karcie rozwiązań zadań otwartych**.
11. Ewentualne poprawki w odpowiedziach zapisz zgodnie z informacjami zamieszczonymi na następnej stronie.
12. Zapisy w brudnopisie nie będą sprawdzane i oceniane.

Powodzenia!

ZAPOZNAJ SIĘ Z PONIŻSZYMI INSTRUKCJAMI

1. **Jak na karcie odpowiedzi zaznaczyć poprawną odpowiedź oraz pomyłkę w zadaniach zamkniętych?**

   Staraj się nie popełniać błędów przy zaznaczaniu odpowiedzi, ale jeśli się pomylisz, błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz inną odpowiedź, np.



Poprawna odpowiedź w zadaniu	Układ możliwych odpowiedzi na karcie odpowiedzi	Sposób zaznaczenia **poprawnej** odpowiedzi	Sposób zaznaczenia **pomyłki** i poprawnej odpowiedzi
C	A B C D	A B ■ D	■ B ■ D
AD	AC AD BC BD	AC ■ BC BD	AC ■ BC ■
FP	PP PF FP FF	PP PF ■ FF	PP ■ ■ FF

2. **Jak zaznaczyć pomyłkę i zapisać poprawną odpowiedź w zadaniach otwartych?**

   Jeśli się pomylisz, zapisując odpowiedź w zadaniu otwartym, pomyłkę przekreśl i napisz poprawną odpowiedź, np.

   nad niepoprawnym fragmentem

   64 cm²
   Pole kwadratu jest równe ~~100 cm²~~.

   lub obok niego

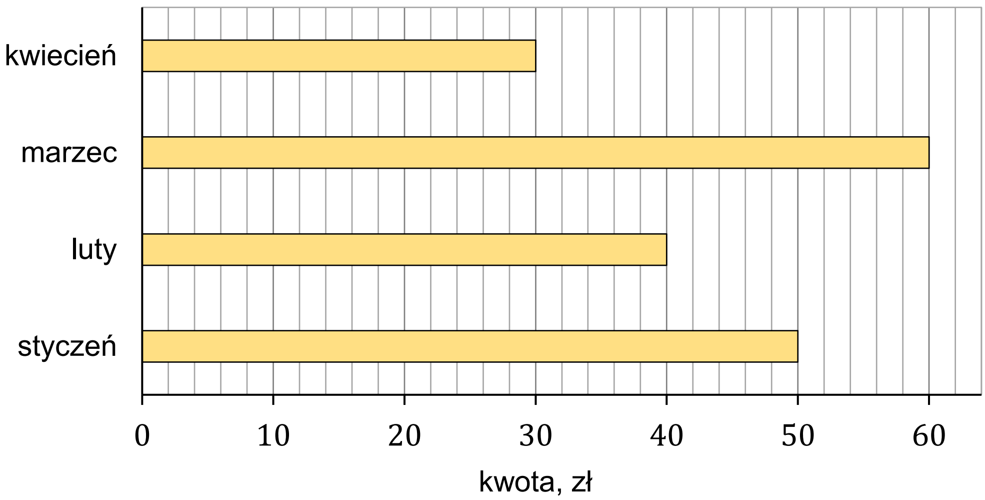
   Pole kwadratu jest równe ~~100 cm²~~. 64 cm²

3. **Pamiętaj, że tylko rozwiązania przeniesione na kartę odpowiedzi i zapisane na karcie rozwiązań zadań otwartych będą oceniane.**

Zadania egzaminacyjne są wydrukowane na kolejnych stronach.

ZADANIE 1. (0–1)

Deskorolka kosztuje 180 zł. Na diagramie przedstawiono kwoty, które Aldona odłożyła w styczniu, w lutym, w marcu i w kwietniu na zakup deskorolki.



Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

W styczniu i lutym łącznie Aldona odłożyła | A | B | kwoty potrzebnej na zakup deskorolki.

A. 45% **B.** 50%

W marcu Aldona odłożyła kwotę o | C | D | większą od kwoty odłożonej w styczniu.

C. 10% **D.** 20%

ZADANIE 2. (0–1)

Dane jest wyrażenie

$$\left(2{,}4 - 5\frac{1}{3}\right) : (-2)$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość tego wyrażenia jest równa

A. $\left(-1\frac{8}{15}\right)$ **B.** $\left(-1\frac{7}{15}\right)$ **C.** $1\frac{7}{15}$ **D.** $1\frac{8}{15}$

BRUDNOPIS

ZADANIE 3. (0–1)

Dane są liczby: $91,\ 92,\ 95,\ 97$.

Która z podanych liczb przy dzieleniu przez 7 daje resztę 1? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 91 **B.** 92 **C.** 95 **D.** 97

ZADANIE 4. (0–1)

Średnia arytmetyczna czterech liczb $a,\ b,\ c,\ d$ jest równa 9, a średnia arytmetyczna dwóch liczb e i f jest równa 6.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Suma liczb $a,\ b,\ c,\ d$ jest o | A | B | większa od sumy liczb e i f.

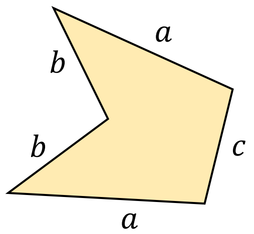
A. 3 **B.** 24

Średnia arytmetyczna liczb $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ jest równa | C | D |.

C. 8 **D.** $7{,}5$

ZADANIE 5. (0–1)

Obwód pięciokąta przedstawionego na rysunku wyraża się wzorem $L = 2a + 2b + c$.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wielkość a wyznaczoną poprawnie z podanego wzoru opisuje równanie

A. $a = \frac{L - 2b - c}{2}$ **B.** $a = \frac{L - 2b + c}{2}$

C. $a = L + 2b - c$ **D.** $a = L - 2b - c$

BRUDNOPIS

ZADANIE 6. (0–1)

W pudełku znajdują się wyłącznie piłki białe, fioletowe i czarne. Piłek białych jest 4 razy więcej niż fioletowych i o 3 mniej niż czarnych. Liczbę piłek fioletowych oznaczymy przez x.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Łączną liczbę wszystkich piłek w pudełku opisuje wyrażenie

A. $9x+3$ **B.** $9x-3$ **C.** $6x+3$ **D.** $6x-3$

ZADANIE 7. (0–1)

Dane są wyrażenia:

$$K=\frac{1}{9}\cdot\sqrt{\frac{1}{16}}-\frac{1}{16}\cdot\sqrt{\frac{1}{9}} \qquad L=9\cdot\sqrt{16}-16\cdot\sqrt{9}$$

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wyrażenie K ma wartość ujemną.	**P**	**F**
Wartość wyrażenia L jest większa od wartości wyrażenia K.	**P**	**F**

ZADANIE 8. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wartość wyrażenia $8^6 : 4^3$ zapisana w postaci potęgi liczby 2 jest równa

A. 2^2 **B.** 2^3 **C.** 2^4 **D.** 2^{12}

ZADANIE 9. (0–1)

Rowerzysta pokonał odcinek drogi o długości $100\ \mathrm{m}$ z prędkością $5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rowerzysta pokonał ten odcinek drogi w czasie

A. 50 sekund. **B.** 20 sekund.

C. 500 sekund. **D.** 200 sekund.

BRUDNOPIS

ZADANIE 10. (0–1)

Na loterię przygotowano 72 losy i ponumerowano je kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 72. Wygrywają losy o numerach od 1 do 9 i od 46 do 72. Pozostałe losy są puste. Ada jako pierwsza wyciąga jeden los.

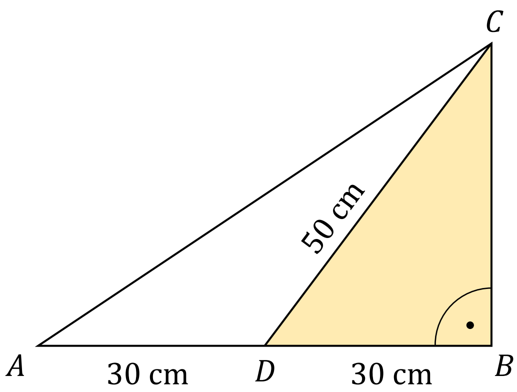
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia przez Adę losu pustego jest równe

A. $\frac{26}{72}$ **B.** $\frac{27}{72}$ **C.** $\frac{35}{72}$ **D.** $\frac{36}{72}$

ZADANIE 11. (0–1)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Na środku boku AB zaznaczono punkt D. Następnie poprowadzono odcinek DC, dzielący trójkąt ABC na dwa trójkąty ADC i DBC. Ponadto $|AD| = |DB| = 30\text{ cm}$ oraz $|DC| = 50\text{ cm}$ (zobacz rysunek).



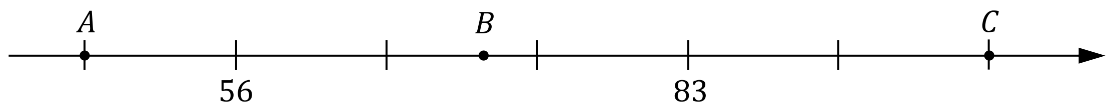
Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Pole trójkąta DBC jest równe 600 cm^2.	**P**	**F**
Pole trójkąta ABC jest dwa razy większe od pola trójkąta ADC.	**P**	**F**

BRUDNOPIS

ZADANIE 12. (0–1)

Na osi liczbowej zaznaczono punkty A, B i C. Odcinek AC jest podzielony na 6 równych części.

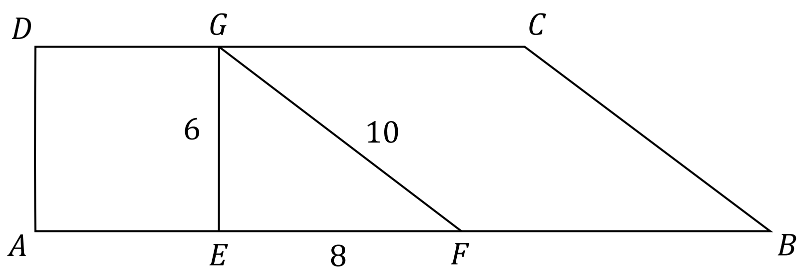


Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Współrzędna punktu C jest liczbą parzystą.	**P**	**F**
Współrzędna punktu B jest liczbą mniejszą od 74.	**P**	**F**

ZADANIE 13. (0–1)

Trapez $ABCD$ podzielono na trzy figury: kwadrat $AEGD$, trójkąt EFG i romb $FBCG$ (zobacz rysunek). Na rysunku podano również długości boków trójkąta EFG.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

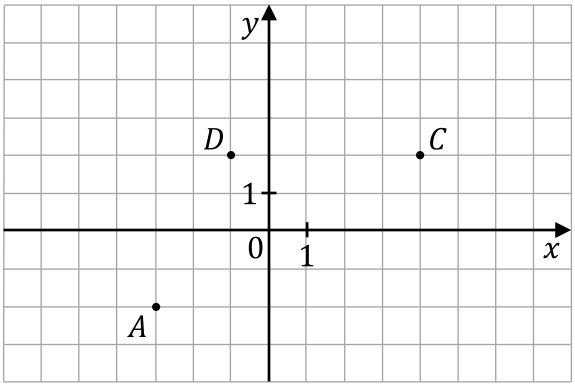
Obwód trapezu $ABCD$ jest równy

A. 56 **B.** 72 **C.** 88 **D.** 120

BRUDNOPIS

ZADANIE 14. (0–1)

W układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono trzy punkty, które są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$: $A = (-3, -2)$, $C = (4, 2)$, $D = (-1, 2)$ (zobacz rysunek).



Współrzędna x wierzchołka B, niezaznaczonego na rysunku, jest liczbą dodatnią.

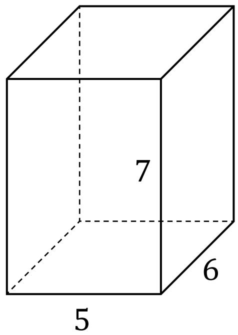
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Niezaznaczony na rysunku wierzchołek B tego równoległoboku ma współrzędne

A. $(4, -2)$ **B.** $(3, -2)$ **C.** $(2, -2)$ **D.** $(6, -2)$

ZADANIE 15. (0–1)

Trzy krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka prostopadłościanu mają długości: 5, 6, 7 (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe

A. 107 **B.** 172 **C.** 210 **D.** 214

BRUDNOPIS

ZADANIE 16. (0–2)

Liczbę $\frac{7}{15}$ zapisano w postaci sumy trzech ułamków zwykłych, z których jeden jest równy $\frac{1}{5}$, a drugi $\frac{1}{6}$.

Uzasadnij, że trzeci składnik tej sumy można przedstawić w postaci ułamka zwykłego, którego licznik jest równy 1, a mianownik jest liczbą całkowitą dodatnią.
Zapisz obliczenia.

ZADANIE 17. (0–3)

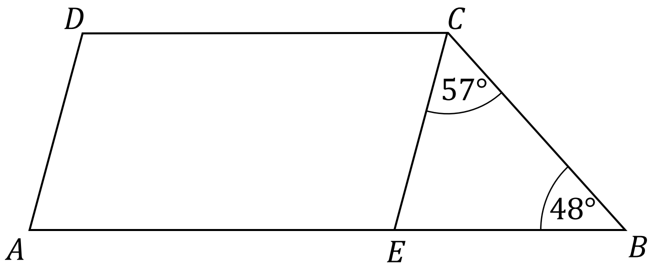
Troje przyjaciół – Andrzej, Basia i Marek – zbiera plakaty. Andrzej ma o 28 plakatów więcej od Basi, a Marek ma ich 3 razy mniej od Basi. Andrzej i Marek mają razem 2 razy więcej plakatów od Basi.

Oblicz, ile plakatów ma każde z tych przyjaciół.
Zapisz obliczenia.

ZADANIE 18. (0–2)

Na rysunku przedstawiono trapez $ABCD$, w którym kąt ABC ma miarę $48°$. Odcinek EC dzieli ten trapez na równoległobok $AECD$ i trójkąt EBC, w którym kąt BCE ma miarę $57°$ (zobacz rysunek).

Oblicz miary kątów DAB, BCD, CDA trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.



ZADANIE 19. (0–2)

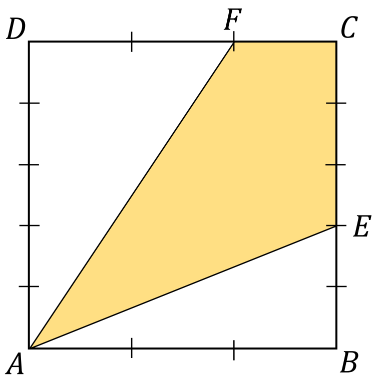
Troje przyjaciół – Andrzej, Basia i Marek – zbiera plakaty. Andrzej ma o 28 plakatów więcej od Basi, a Marek ma ich 3 razy mniej od Basi. Andrzej i Marek mają razem 2 razy więcej plakatów od Basi.

Oblicz, ile plakatów ma każde z tych przyjaciół.
Zapisz obliczenia.

ZADANIE 20. (0–3)

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości $15\ \mathrm{cm}$. Każdy z boków AB i CD podzielono na trzy równe części, a każdy z boków AD i BC podzielono na pięć równych części.
Na boku BC zaznaczono punkt E, na boku CD zaznaczono punkt F, a ponadto poprowadzono odcinki AE i AF (zobacz rysunek).

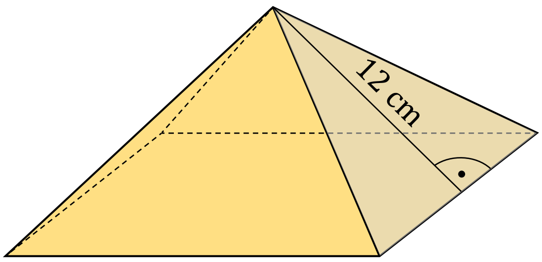
Oblicz pole czworokąta $AECF$. Zapisz obliczenia.



ZADANIE 21. (0–3)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym wysokość ściany bocznej poprowadzona do krawędzi podstawy jest równa $12\ \mathrm{cm}$ (zobacz rysunek). Pole powierzchni jednej ściany bocznej tego ostrosłupa jest równe $108\ \mathrm{cm}^2$.

Oblicz, ile razy pole dużej tablicy jest większe od pola małej tablicy.
Zapisz obliczenia.



BRUDNOPIS

ODPOWIEDZI

ZADANIE 1.

BD

ZADANIE 2.

C

ZADANIE 3.

B

ZADANIE 4.

BC

ZADANIE 5.

A

ZADANIE 6.

A

ZADANIE 7.

FF

ZADANIE 8.

D

ZADANIE 9.

B

ZADANIE 10.

D

ZADANIE 11.

PP

ZADANIE 12.

FP

ODPOWIEDZI

ZADANIE 13.

A

ZADANIE 14.

C

ZADANIE 15.

D

ZADANIE 16.

I sposób

Obliczymy trzeci składnik sumy:

$$\frac{7}{15}-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{14}{30}-\frac{11}{30}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$$

Trzeci składnik sumy można przedstawić w postaci ułamka $\frac{1}{10}$, który spełnia warunki zadania.

II sposób

Zapiszemy i rozwiążemy równanie:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+x=\frac{7}{15}$$

$$\frac{11}{30}+x=\frac{14}{30}$$

$$x=\frac{3}{30}$$

$$x=\frac{1}{10}$$

Trzeci składnik sumy można przedstawić w postaci ułamka $\frac{1}{10}$, który spełnia warunki zadania.

ZADANIE 17.

I sposób

b – liczba plakatów Basi

$b+28$ – liczba plakatów Andrzeja

$\frac{b}{3}$ – liczba plakatów Marka

Zapiszemy równanie wynikające z warunków zadania i obliczymy liczbę plakatów Basi:

$$b+28+\frac{b}{3}=2b$$

$$\frac{2}{3}b = 28$$

$$b = 42$$

Obliczymy liczbę plakatów Marka:

$$\frac{b}{3} = \frac{42}{3} = 14$$

Obliczymy liczbę plakatów Andrzeja:

$$b + 28 = 42 + 28 = 70$$

Odpowiedź: Basia ma 42 plakaty, Marek ma 14 plakatów, Andrzej ma 70 plakatów.

II sposób

a – liczba plakatów Andrzeja

$a - 28$ – liczba plakatów Basi

$\frac{a-28}{3}$ – liczba plakatów Marka

Zapiszemy równanie i obliczymy liczbę plakatów Andrzeja:

$$a + \frac{a-28}{3} = 2(a-28)$$

$$3a + a - 28 = 6a - 168$$

$$a = 70$$

Obliczymy liczbę plakatów Basi, a następnie obliczymy liczbę plakatów Marka:

$$a - 28 = 70 - 28 = 42$$

$$\frac{a-28}{3} = \frac{70-28}{3} = 14$$

Odpowiedź: Basia ma 42 plakaty, Marek ma 14 plakatów, Andrzej ma 70 plakatów.

III sposób

m – liczba plakatów Marka

$3m$ – liczba plakatów Basi

$3m + 28$ – liczba plakatów Andrzeja

Zapiszemy równanie i obliczymy liczbę plakatów Marka, a następnie liczbę plakatów Basi i Andrzeja:

$$3m + 28 + m = 6m$$

$$2m = 28$$

$$m = 14$$

$$3m = 42$$

$$3m + 28 = 42 + 28 = 70$$

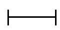
Odpowiedź: Basia ma 42 plakaty, Marek ma 14 plakatów, Andrzej ma 70 plakatów.

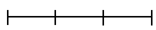
IV sposób
Metoda prób i błędów.

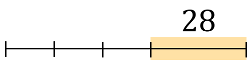
Liczba plakatów					
Basia	Andrzej o 28 więcej niż Basia	Marek 3 razy mniej niż Basia	Marek i Andrzej łącznie	2 razy więcej niż Basia	Sprawdzenie
30	58	10	68	60	$68 \neq 60$
36	64	12	76	72	$76 \neq 72$
48	76	16	92	96	$92 \neq 96$
42	**70**	**14**	**84**	**84**	**$84 = 84$**

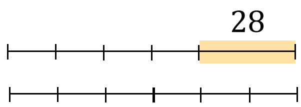
Odpowiedź: Basia ma 42 plakaty, Marek ma 14 plakatów, Andrzej ma 70 plakatów.

V sposób
Sposób graficzny:

Marek ma 1 część: 

Basia ma 3 części: 

Andrzej ma o 28 plakatów więcej od Basi: 

Andrzej i Marek mają łącznie 2 razy więcej plakatów od Basi: 

Stąd wynika, że 28 plakatów stanowią 2 części, czyli 1 część stanowi 14 plakatów.

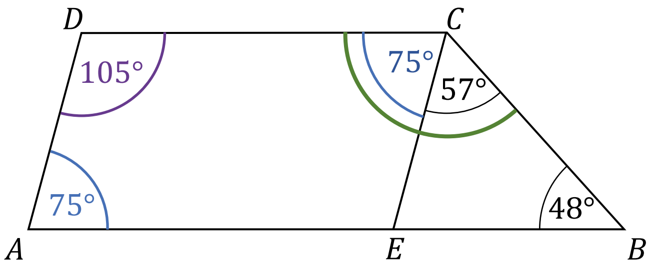
Zatem Basia ma 42 plakaty, Marek ma 14 plakatów, Andrzej ma 70 plakatów.

ZADANIE 18.

I sposób

Obliczymy miarę kąta wewnętrznego BCD trapezu $ABCD$. Wykorzystamy własność, że suma miar kątów wewnętrznych przy jednym ramieniu trapezu jest równa $180°$.

$180° - 48° = 132°$



Obliczymy miarę kąta wewnętrznego ECD równoległoboku $AECD$:

$132° - 57° = 75°$

Kąt wewnętrzny DAE (DAB) ma także miarę równą $75°$.

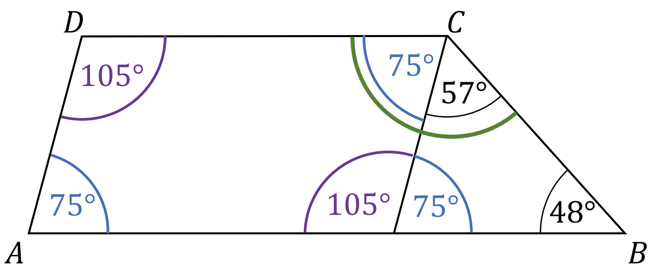
Obliczymy miarę kąta wewnętrznego CDA trapezu $ABCD$:

$180° - 75° = 105°$

Odpowiedź: Kąty trapezu $ABCD$ mają miary:

$|\sphericalangle DAB| = 75°$, $|\sphericalangle BCD| = 132°$, $|\sphericalangle CDA| = 105°$.

II sposób



Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa $180°$, zatem:

$|\sphericalangle CEB| = 180° - 48° - 57° = 75°$

Skoro

$|\sphericalangle CEB| + |\sphericalangle AEC| = 180°$, to $|\sphericalangle AEC| = 180° - 75° = 105°$

Kąty AEC i CDA są równe, więc $|\sphericalangle CDA| = 105°$.

Skoro

$|\sphericalangle CDA| + |\sphericalangle DAE| = 180°$, to $|\sphericalangle DAE| = 180° - 105° = 75°$.

Kąty DAE i ECD są równe, więc $|\sphericalangle BCD| = 75° + 57° = 132°$.

Odpowiedź: Kąty trapezu $ABCD$ mają miary:

$|\sphericalangle DAB| = 75°$, $|\sphericalangle BCD| = 132°$, $|\sphericalangle CDA| = 105°$.

III sposób

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa $180°$, zatem:

$$|\measuredangle CEB| = 180° - 48° - 57° = 75°$$

Kąty CEB i ECD są naprzemianległe, zatem:

$$|\measuredangle CEB| = |\measuredangle ECD| = 75°$$

Ponadto:
kąty ECD i DAE (DAB) są równe, więc

$$|\measuredangle ECD| = |\measuredangle DAE| = 75°$$

Obliczymy miarę kąta BCD:

$$|\measuredangle BCD| = 57° + 75° = 132°$$

Skoro

$|\measuredangle AEC| + |\measuredangle ECD| = 180°$, to $|\measuredangle AEC| = 180° - 75° = 105°$.

Kąty AEC i CDA są równe, więc

$$|\measuredangle CDA| = 105°$$

Odpowiedź: Kąty trapezu $ABCD$ mają miary:
$|\measuredangle DAB| = 75°$, $|\measuredangle BCD| = 132°$, $|\measuredangle CDA| = 105°$.

ZADANIE 19.

I sposób

Obliczymy długość boku małej kwadratowej tablicy w rzeczywistości:

$$3 \text{ cm} \cdot 20 = 60 \text{ cm}$$

Obliczymy pole małej kwadratowej tablicy w rzeczywistości:

$$P_{małej\ tablicy} = 60 \text{ cm} \cdot 60 \text{ cm} = 3\,600 \text{ cm}^2$$

Obliczymy pole dużej prostokątnej tablicy w rzeczywistości:

$$P_{dużej\ tablicy} = 240 \text{ cm} \cdot 90 \text{ cm} = 21\,600 \text{ cm}^2$$

Obliczymy, ile razy pole dużej prostokątnej tablicy jest większe od pola małej kwadratowej tablicy:

$$\frac{P_{dużej\ tablicy}}{P_{małej\ tablicy}} = \frac{21\,600 \text{ cm}^2}{3\,600 \text{ cm}^2} = 6$$

Odpowiedź: Pole dużej tablicy jest 6 razy większe od pola małej tablicy.

II sposób

Obliczymy długości boków dużej prostokątnej tablicy na rysunku w skali $1:20$:

$$240\text{ cm} : 20 = 12\text{ cm}$$

$$90\text{ cm} : 20 = 4{,}5\text{ cm}$$

Obliczymy pole dużej prostokątnej tablicy na rysunku w skali $1:20$:

$$P_{rysunku\ dużej\ tablicy} = 12\text{ cm} \cdot 4{,}5\text{ cm} = 54\text{ cm}^2$$

Obliczymy pole małej kwadratowej tablicy na rysunku w skali $1:20$:

$$P_{rysunku\ małej\ tablicy} = 3\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 9\text{ cm}^2$$

Obliczymy, ile razy pole dużej prostokątnej tablicy jest większe od pola małej kwadratowej tablicy:

$$\frac{P_{dużej\ tablicy}}{P_{małej\ tablicy}} = \frac{P_{rysunku\ dużej\ tablicy}}{P_{rysunku\ małej\ tablicy}} = \frac{54\text{ cm}^2}{9\text{ cm}^2} = 6$$

Odpowiedź: Pole dużej tablicy jest 6 razy większe od pola małej tablicy.

III sposób

Obliczymy długość boku małej kwadratowej tablicy w rzeczywistości:

$$3\text{ cm} \cdot 20 = 60\text{ cm}$$

Obliczymy stosunek długości boków prostokątnej tablicy do długości boku kwadratowej tablicy:

$$240\text{ cm} : 60\text{ cm} = 4$$

$$90\text{ cm} : 60\text{ cm} = 1{,}5$$

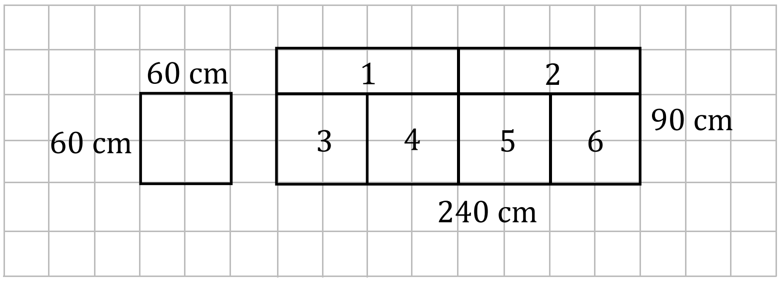
Obliczymy, ile razy pole dużej prostokątnej tablicy jest większe od pola małej kwadratowej tablicy:

$$4 \cdot 1{,}5 = 6$$

Odpowiedź: Pole dużej tablicy jest 6 razy większe od pola małej tablicy.

IV sposób

Sposób graficzny:



Odpowiedź: Pole dużej tablicy jest 6 razy większe od pola małej tablicy.

ZADANIE 20.

I sposób

Obliczymy pole trójkąta ABE:

$$|AB| = 15 \text{ (cm)}$$

$$|BE| = 2 \cdot (15 : 5) = 6 \text{ (cm)}$$

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BE|$$

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6 = 45 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Obliczymy pole trójkąta ADF:

$$|AD| = 15 \text{ (cm)}$$

$$|DF| = 2 \cdot (15 : 3) = 10 \text{ (cm)}$$

$$P_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |DF|$$

$$P_{ADF} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75 \text{ (cm}^2\text{)}$$

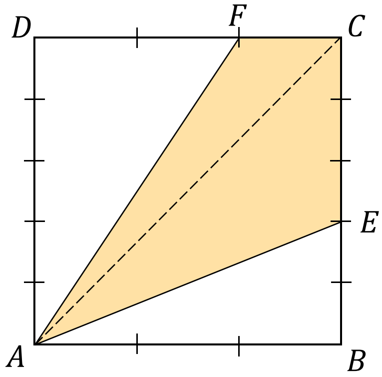
Zauważymy, że pole czworokąta $AECF$ jest różnicą pola kwadratu $ABCD$ i pól trójkątów ABE i ADF:

$$P_{AECF} = P_{ABCD} - P_{ABE} - P_{ADF}$$

$$P_{AECF} = 225 - 45 - 75 = 105 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Odpowiedź: Pole czworokąta $AECF$ jest równe 105 cm^2.

II sposób



Obliczymy pole trójkąta AEC:

$$|AB| = 15 \text{ (cm)}$$

$$|EC| = 3 \cdot (15 : 5) = 9 \text{ (cm)}$$

$$P_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot |EC| \cdot |AB|$$

$$P_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 15 = 67{,}5 \ (\text{cm}^2)$$

Obliczymy pole trójkąta ACF:

$$|AD| = 15 \text{ (cm)}$$

$$|CF| = 15 : 3 = 5 \text{ (cm)}$$

$$P_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot |CF| \cdot |AD|$$

$$P_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 15 = 37{,}5 \ (\text{cm}^2)$$

Pole czworokąta $AECF$ jest sumą pól trójkątów AEC i ACF.

Obliczymy pole czworokąta $AECF$:

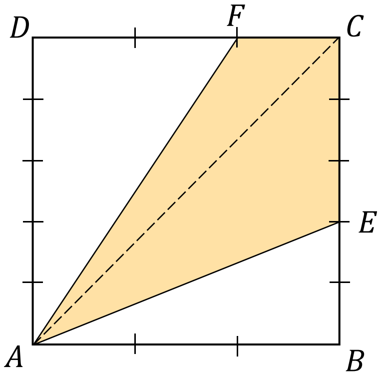
$$P_{AECF} = P_{AEC} + P_{ACF}$$

$$P_{AECF} = 67{,}5 + 37{,}5 = 105 \ (\text{cm}^2)$$

Odpowiedź: Pole czworokąta $AECF$ jest równe 105 cm^2.

III sposób

Obliczymy, jaką część pola kwadratu $ABCD$ stanowią pola trójkątów AEC i ACF. Wykorzystamy fakt, że stosunek pól trójkątów o tych samych wysokościach jest równy stosunkowi długości ich podstaw:



$$P_{AEC} = \frac{3}{5} \cdot P_{ABC} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{3}{10} P_{ABCD}$$

$$P_{ACF} = \frac{1}{3} \cdot P_{ACD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{6} P_{ABCD}$$

Obliczymy pole czworokąta $AECF$:

$$P_{AECF} = P_{AEC} + P_{ACF}$$

$$P_{AECF} = \frac{3}{10} P_{ABCD} + \frac{1}{6} P_{ABCD}$$

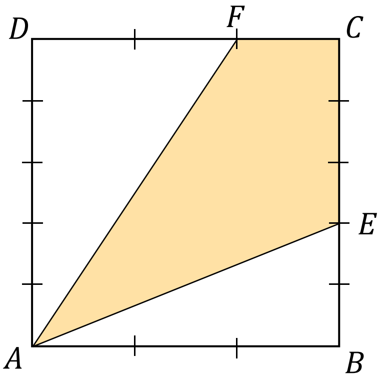
$$P_{AECF} = \frac{7}{15} P_{ABCD} = \frac{7}{15} \cdot 225 = 105\ (\mathrm{cm}^2)$$

Odpowiedź: Pole czworokąta $AECF$ jest równe $105\ \mathrm{cm}^2$.

IV sposób

Obliczymy długość podstawy FC trapezu $ABCF$:

$$|FC| = 15 : 3 = 5\ (\mathrm{cm})$$



Obliczymy pole trapezu $ABCF$:

$$|AB| = 15\ (\mathrm{cm})$$

$$|BC| = 15\ (\mathrm{cm})$$

$$P_{ABCF} = \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |FC|) \cdot |BC|$$

$$P_{ABCF} = \frac{1}{2} \cdot (15 + 5) \cdot 15 = 150\ (\mathrm{cm}^2)$$

Obliczymy pole trójkąta ABE:

$$|AB| = 15\ (\mathrm{cm})$$

$$|BE| = 2 \cdot (15 : 5) = 6\ (\mathrm{cm})$$

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BE|$$

$$P_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 6 = 45\ (\mathrm{cm}^2)$$

Zauważymy, że pole czworokąta $AECF$ jest różnicą pola trapezu $ABCF$ i pola trójkąta prostokątnego ABE:

$$P_{AECF} = P_{ABCF} - P_{ABE}$$

$$P_{AECF} = 150 - 45 = 105\ (\mathrm{cm}^2)$$

Odpowiedź: Pole czworokąta $AECF$ jest równe $105\ \mathrm{cm}^2$.

V sposób

Obliczymy, jaką część pola kwadratu $ABCD$ stanową pola trójkątów ABE i ADF. Wykorzystamy fakt, że stosunek pól trójkątów o tych samych wysokościach jest równy stosunkowi długości ich podstaw:

$$P_{ABE} = \frac{2}{5} \cdot P_{ABC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{5} P_{ABCD}$$

$$P_{ADF} = \frac{2}{3} \cdot P_{ACD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{3} P_{ABCD}$$

Zauważymy, że pole czworokąta $AECF$ jest różnicą pola kwadratu $ABCD$ oraz pól trójkątów ABE i ADF:

$$P_{AECF} = P_{ABCD} - P_{ABE} - P_{ADF}$$

Obliczymy pole czworokąta $AECF$:

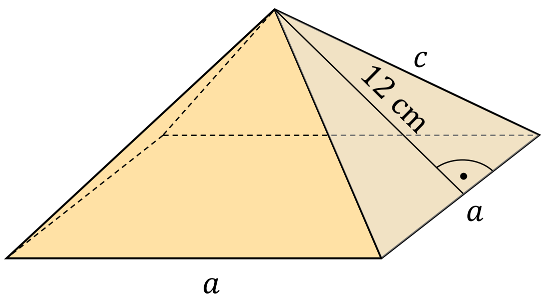
$$P_{AECF} = P_{ABCD} - \frac{1}{5} P_{ABCD} - \frac{1}{3} P_{ABCD}$$

$$P_{AECF} = \frac{7}{15} P_{ABCD} = \frac{7}{15} \cdot 225 = 105\ (\mathrm{cm}^2)$$

Odpowiedź: Pole czworokąta $AECF$ jest równe $105\ \mathrm{cm}^2$.

ZADANIE 21.

Oznaczymy na rysunku długość krawędzi podstawy ostrosłupa jako a oraz długość krawędzi bocznej jako c.



Obliczymy długość krawędzi podstawy ostrosłupa:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 12$$

$$108 = a \cdot 6$$

$$a = 18\ (\mathrm{cm})$$

Obliczymy długość krawędzi bocznej ostrosłupa z twierdzenia Pitagorasa:

$$c^2 = 12^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$c^2 = 12^2 + 9^2$$

$$c^2 = 225$$

$$c = \sqrt{225}$$

$$c = 15$$

Obliczymy sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa:

$$4 \cdot a + 4 \cdot c = 4 \cdot 18 + 4 \cdot 15 = 132\ (\mathrm{cm})$$

Odpowiedź: Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa jest równa $132\ \mathrm{cm}$.